UDC 50 : 669 . 1 . 011

技術解説

# 数学をコアにした課題解決型の連携に向けて

## What Outcome is Expected of Mathematics Today? Problem-solving Type Collaboration Focusing on Mathematics

中 川 淳 一*
*Junichi NAKAGAWA*

抄 録

具体的な課題を普遍的なものに置き換え考えるという数学的思考の利点を現実世界で最大限発揮できるよう，(1) 数学により抽象化した枠組みのなかで現実世界の問題をとらえ問題の根源を明らかにすること，(2) 数学により構築した枠組みをもとに既存の技術概念の再構築を図ること，(3) 技術の出口をつくり技術の製造現場や社会への浸透を図りイノベーションに繋げること，これらが数学をコアにした課題解決型の連携の目指すものであり，伝熱逆問題を事例にして，その有効性を示した。

**Abstract**

**My principle for problem-solving collaboration focusing on mathematics is as follows. 1) Clarification of the principle of the problem by looking at a real-world problem in an abstracted framework using mathematics. 2) Reconstruction of the existing technical concept based on the constructed framework and creating a new technological concept by “think from zero” using mathematics. 3) Applying the technology and attempting to promote it among the manufacturing field and society, and leading them to innovation. Mathematics motivates manufacturing field and society. I showed the effectiveness of collaboration for solving social problems using examples regarding the heat conduction inverse problems.**

### 数学と製鉄プロセス

数学は社会の至るところに存在します。数学と製鉄業という一見意外な組み合わせのなかにも，数学を必要とする場面が多数あります。

例えば，図 1 に示す高炉を事例に考えます。高炉は，高さが約 35m，内径が約 15m の巨大な反応容器で，焼結鉱とコークスを化学反応させて，溶銑と呼ばれる約 1500℃の溶けた鉄をとりだす工程です。高炉では，内部の状態を知りたいが直接計測が困難なため，炉底の煉瓦に埋設された熱電対の温度挙動が，非定常熱伝導方程式の解に可能な限り合致するように，煉瓦内面の伝熱状態を推定しています。ここでは，計測された結果から，その原因を特定する “ 逆問題 ” という数学手法を使います。

図 1-2 の熱電対で計測された 2 点の煉瓦温度の時系列データから，溶銑から煉瓦内壁面に流入する熱流束を計算しますと，図 1-3 に示すように温度計測値を見ているだけでは識別困難な熱流束の変動量の差異が現れます。図 1-2 の温度計測値は，通常，煉瓦を保護している凝固相が溶解し煉瓦温度が上昇したため，高炉への空気供給を止め溶銑の製造を約 1 日間休止する休風という操作を何度も繰り返し，凝固相が安定的に再生成するようになった過程を示す貴重なデータです。グラフの破線が休風を実施したタイミングを示します。

休風という系に与える外的刺激と熱流束の変動量の大きさの組み合わせが，系の安定性を示す重要な指標になることが判っています[1, 2]。

表 1 は，高炉の伝熱逆問題で当初使用していました工学的手法[3] と，数学者との連携を通じ新たに開発した数学的手法[4, 5] を比較したものです。伝熱逆問題に使用する数学モデルは 1 次元非定常熱伝導方程式を使いました。高炉炉底は 3 次元形状ですが，支配的な熱移動は溶銑から炉底煉瓦背面への 1 次元方向であることが経験的に知られており，また，炉底の周方向の熱電対間隔は密でなく，計測精度と

* 先端技術研究所 数理科学研究部 上席主幹研究員 博士（数理科学） 千葉県富津市新富 20-1 〒 293-8511

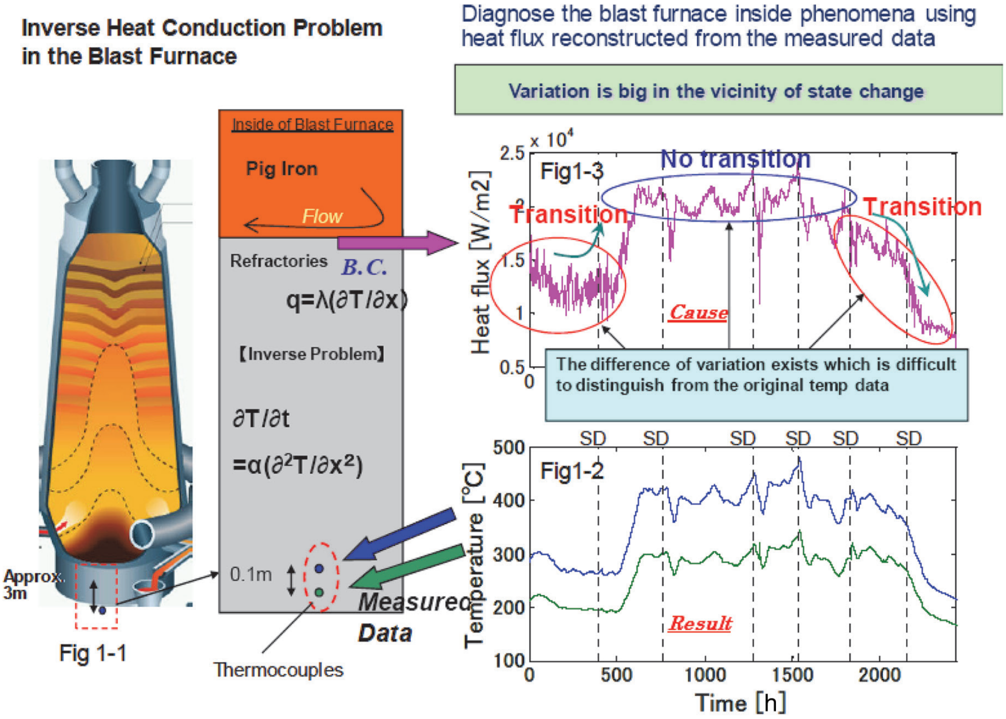


図１　高炉への伝熱逆問題手法の適用事例
Application of inverse heat conduction problem to blast furnace

表１　高炉の伝熱逆問題の工学的思考[3]と数学的思考[4]の比較
Comparison of engineering thinking and mathematical thinking on inverse heat conduction problem in blast furnace

| | Engineering Thinking | Mathematical Thinking |
|---|---|---|
| $\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ (1) | Unsteady heat conduction equation which shows heat balance of refractory inside | Parabolic partial differential equation |
| $T(x,0)=T_0(x)$ (2) | Initial conditions which show initial temp. distribution of refractory inside | Initial conditions |
| $\frac{\partial T}{\partial x}(0,t)=f(t)$ (3) | Boundary conditions which show heat conduction through refractory inside wall surface | Neumann boundary conditions |
| $T(l,t)=\hat{T}_1(t)$ (4) | Boundary conditions which show heat conduction through refractory back wall surface | Dirichlet boundary conditions |
| $T(l-\Delta x,t)=\hat{T}_2(t)$ (5) | Used for error judgment of variation method | Neumann boundary conditions |
| | $\frac{\partial T}{\partial x}(l,t)=g(t)\approx(\hat{T}_2(t)-\hat{T}_1(t))/\Delta x$ (6) | |

数学モデルの精緻性がマッチしないため逆問題の計算精度低下を招くのが理由です。

図２は，高炉煉瓦の熱電対の位置を示す概念図です。工学的手法では，変分法を採用しており，初期条件は既知であることが前提になっています。しかし，高炉煉瓦内部の全体の温度分布は計測されていないため，適当に初期温度分布を設定し，設定した温度分布の不確かさに起因する計算誤差が熱拡散の効果で無視できる時間を経験的に判定し，それ以降の計算結果を採用していました。一方，数学的手法では，放物型偏微分方程式の初期条件と片側のノイマン型境界条件が未知で，もう一方の境界条件としてノイマン型およびディリクレ型境界条件の双方が，計測で与えられることを前提に，数学解析を行います。

図３に示すように，２種類の計測情報と２種類の未知変数の因果関係の数理的構造が明確になっているのが判ります。ただし，数値積分項①と②は，逆問題の数値計算上，

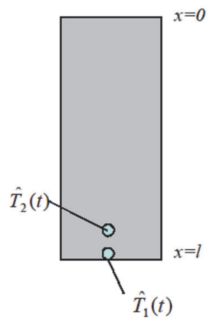


図２　高炉煉瓦の熱電対の配置と位置座標の設定
Thermocouple arrangement and setting of positional coordinates in blast furnace refractories

$$\underbrace{T(x,t)}_{\text{measured temperature(B.C.)}}=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(x)e^{-\lambda_n t}-\int_0^t G(t-s,x,0)\underbrace{f(s)}_{\text{B.C. of inside wall (unknown)}}ds+\int_0^t G(t-s,x,l)\underbrace{g(s)}_{\text{measured heat flux(B.C)}}ds$$

I.C.（unknown）

$$A_0(x)=\frac{1}{l}\int_0^l T_0(y)dy \qquad A_n(x)=\frac{2}{l}\int_0^l T_0(y)\cos\frac{n\pi}{l}y\,dy\cdot\cos\frac{n\pi}{l}x$$

$$\lambda_n=\alpha\frac{n^2\pi^2}{l^2} \qquad G(t,x,y)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda_n t}\cos\frac{n\pi}{l}\cos\frac{n\pi}{l}y+\frac{1}{l}$$

図３　伝熱逆問題の数学的手法の基本解の表現（B.C. は境界条件，I.C. は初期条件を示す）
Expression of elementary solution of mathematical technique for inverse heat conduction problem (B.C. shows boundary conditions and I.C. shows initial conditions.)

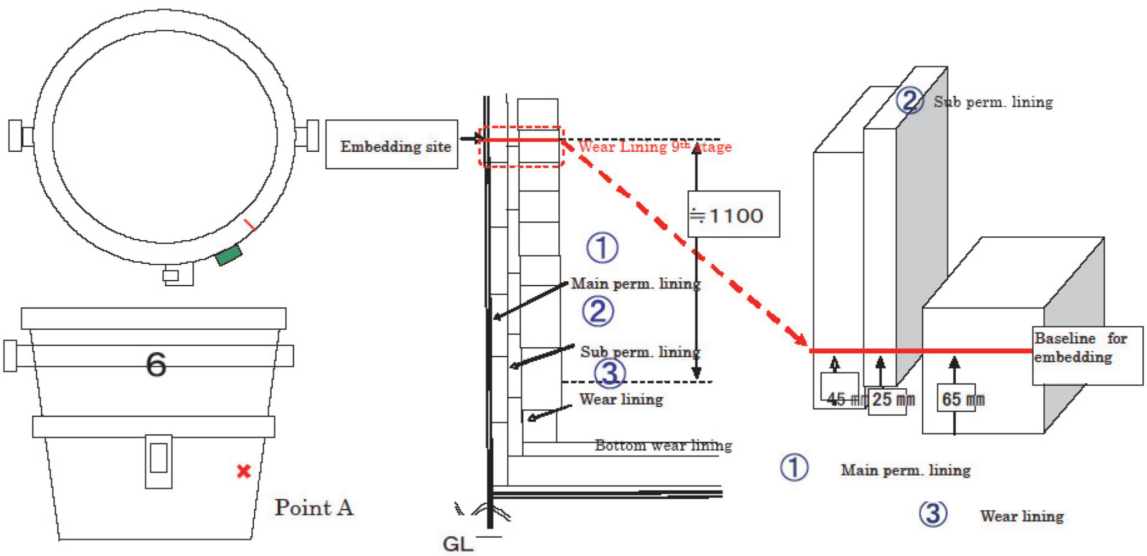


図４　溶鋼鍋と逆問題解析の妥当性検証試験における熱電対設置の概略図
Steel ladle & Thermocouple arrangement outline for adequacy test of inverse problem analysis

極めて不安定であるため，数値計算アルゴリズムの工夫が必要になります[4]。

上述しましたことは，高炉の伝熱逆問題という具体的な課題に対し，数学を使い，抽象的枠組みのなかで問題をとらえることで，問題の根源を明らかにできることを示しています。これにより，高炉の伝熱逆問題という個別化された課題が，“温度と熱流束の時間変化を同時計測することで材料内部の温度情報を推定する技術”として，工学的手法の技術概念を再構築することができました。

上述の技術概念は，赤外線サーモグラフィーを使った装置材料の非破壊診断技術に適用できます。赤外線サーモグラフィーとは，赤外線素子を用いて物体の表面温度分布を計測し画像化する装置で，産業，医療等，さまざまな分野で使われており，近年，注目を集めている技術です。図４は溶鋼鍋の概略，図５は溶鋼鍋の外壁温度の計測事例です。

外壁温度から熱流束を放射伝熱と自然対流伝熱の和として計算できるので，高炉で使った同一の数学的手法を，そのまま適用し，溶鋼鍋を構成する耐火物の内部温度が計算できます。装置材料の内部温度情報が活用できるので，こ

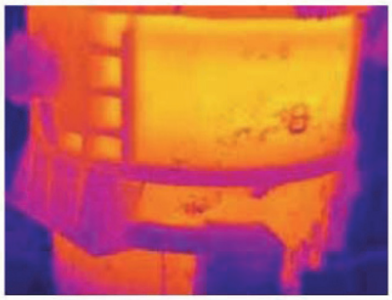

図５　赤外線サーモグラフィーによる溶鋼鍋外壁温度計測事例
Example of the outer well temperature of the steel ladle measured by infrared thermography camera

れまで外壁温度情報だけから判断していた耐火物の溶損状態の診断能を革新的に向上させる可能性を有しています。また，溶鋼鍋以外にも，設備の異常診断等，さまざまな技術の出口の拡大が期待できます。

図６は，図４の点Ａの位置の煉瓦内部に，試験的に熱電対を数か所設置し，逆問題計算結果の精度を検証した事例です。計算結果は，製造現場が満足できるレベルで実測値に合致しています。数学的手法に求める精度は課題の性

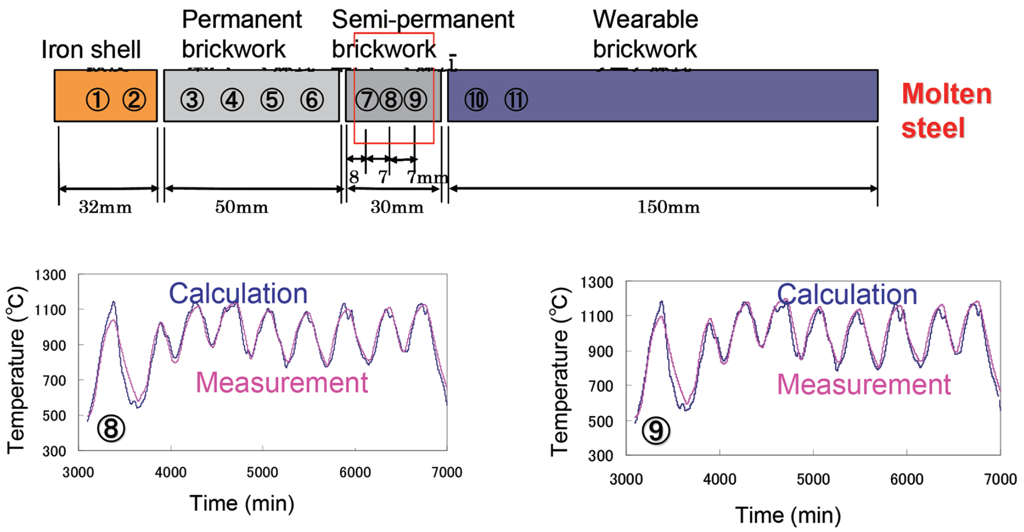


図６　伝熱逆問題の数学的手法の検証結果の一例
Example of verification result of mathematical technique for inverse heat conduction problem

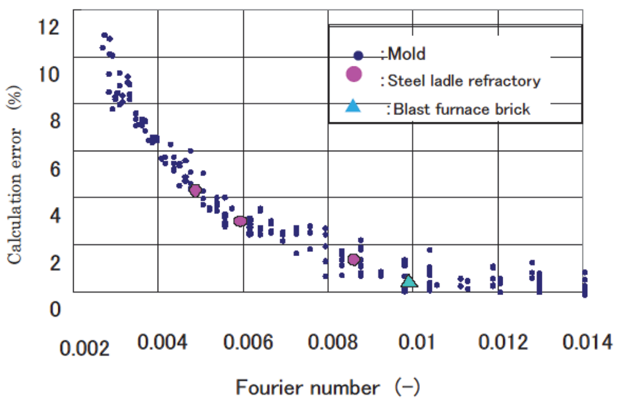


図７　伝熱逆問題の計算誤差の無次元数による一般化
Generalization of calculation error of inverse heat conduction problem by dimensionless number

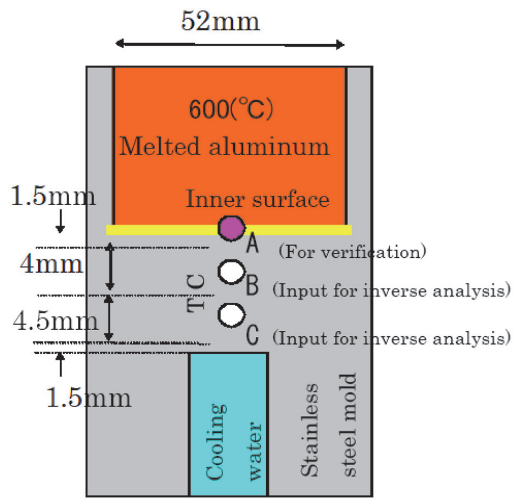


図８　伝熱逆問題の計算誤差を工学的に一般化するために使用した実験装置の概要
Outline of laboratory experimental device used to generalize the calculation error of inverse heat conduction problem in engineering manner

格に依存します。図７は，前述した伝熱逆問題手法の計算誤差の性質を評価するために，図８に示す試験金型を製作し実験を行いました。点Bと点Cの位置に設置した熱電対の温度計測データから点Aの温度を計算し，実測値と計算値の差異を実測温度で除したものを計算誤差と定義し，結果をフーリエ数で整理しました。

フーリエ数は，熱伝導による熱移動量と材料に蓄積される熱量の比で定義される無次元数で，$kt/(l^2c\rho)$ で表されます。ここで，$k$ は材料の熱伝導率，$t$ は温度1℃の変化に要する時間，$l$ は温度計測位置と材料の稼働面との距離，$c$ は材料の比熱，$\rho$ は材料の密度を示します。フーリエ数が小さくなるにつれ計算誤差が大きくなることが判り，熱が温度計に伝わり難くなるほど，計算の信頼性が低下することを意味します。前述した溶鋼鍋と高炉のケースは，図７の誤差曲線のばらつきの領域内に入っており，数学的手法の適用限界の目安になります。また，本数学的手法を，例えば，別の材料で構成された全く新しい装置でも，詳細な実験または計測を行う前に，技術の適用可否をあらかじめ見積もることが可能になります。数学的手法と工学的思考を組み合わせることにより，いいかえますと，数学者と企業研究者が連携することで可能になった技術の汎用化の事例です[6]。

## 課題解決型の連携における数学の役割と期待

図９は，数学者と企業研究者との課題解決型の連携で実績をあげてきたひとつのスタイルを示します[5]。個々の数学者の才能を最大限発揮できるように，ひとつの課題に対し，複数のタスクフォースチームを並行して走らせ，各々の課題の性格に応じて，数学者のメンバーを柔軟に編成します。

この連携の場は，課題解決だけでなく人材育成の役割を担っており，すべての中心に，フィードバックが機能する

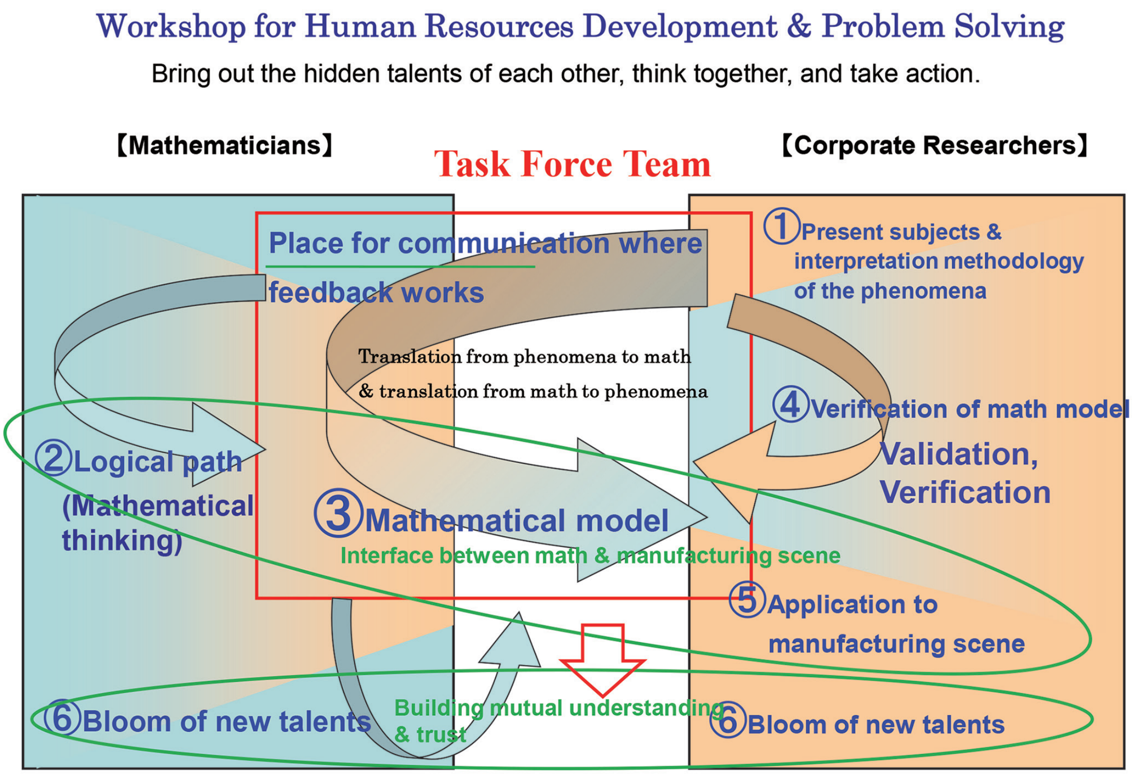


図９　数学者と企業研究者の連携のスタイル
Style of collaboration between mathematicians and corporate researchers

コミュニケーションの場があります。現象の解釈方法，数学的なものの考え方，数学モデルの妥当性検証および精度検証等，さまざまな視点からのフィードバックを経て，数学モデルが完成します。数学モデルは，数学と製造現場のインターフェースの役割を担います。

ここで，企業の課題解決のための数学モデルとは，製造現場で起こっている現象の本質を，数学的に解釈する一連の“ものの考え方”の手続きであるといえます。既存の数学手法を単に持ってくるのではなく，数学者と企業研究者による議論を通じた共同の成果物であり，企業の課題解決に繋がるだけでなく，数学的にも新しい発見が生まれます[7,8]。数学モデルの開発を通じ，数学者と企業研究者の相互理解が深まり，信頼関係ができあがるなか，数学者，企業人の双方の新たな才能が開花し，数学と社会のハブとなる人材が育っていくことを目指しています。

また，数学モデルは，現象理解の道標になり，関係者間での課題認識と情報共有を促し，課題解決の多様なアイデアを引き出す役割を果たします。実際の現象を扱っている製造現場の人たちとモデルを共有し，共同で進化させていくことが，限られた時間のなかで最善の解を見出す方法だと考えています。そのためには，現象の本質を捉えているだけでなく，判り易さがモデルに求められ，数学活用の手腕が問われるところです。

具体的な課題を普遍的なものに置き換え考えるという数学的思考の利点を現実世界で最大限発揮できるよう，

(1) 数学により抽象化した枠組みのなかで現実世界の問題をとらえ問題の根源を明らかにすること，
(2) 数学により構築した枠組みをもとに既存の技術概念の再構築を図ること，
(3) 技術の出口をつくり技術の製造現場や社会への浸透を図りイノベーションに繋げること，

これらが数学をコアにした課題解決型の連携の目指すものであるといえます。

CT スキャン，暗号理論，ウエーブレット等，数学者が純粋な数学的興味から作った理論が，時を隔てて数学者以外により思わぬ応用が見出され，応用面からの刺激で数学の分野が新たな次元で発展するという構図をとっており，これまでの歴史が実証するところによれば，数学，数理科学の他分野への応用および応用からの刺激による理論研究の発展，深化は殆ど常にこの形で起こっています[9]。数学をコアにした課題解決型の連携は，数学理論と社会を動かす技術実現の時間の隔たりを劇的に短縮する大きな可能性を有しています[10]。

また，数学は普遍的であるがゆえに，個別の現象やデータに依存せずとも理論が成立し，中立を保つことができます。この中立性こそ，数学がイノベーションの源泉として，諸科学，工学，産業界に対し，Give & Given の課題解決型の新たな連携スタイルを構築できる大きな強みになるはずです[7-9, 11, 12]。

本稿は，“数学セミナー”2010 年 7 月号の記事を基に，内容を改変したものである。

## 参照文献


1) 中川淳一，合原一幸：リカレンスプロットによる高炉の非定常解析．信学論（A）．J187-A (10)，366-381 (2004)
2) 中川淳一，文部科学省科学技術政策研究所編著：数学イノベーション．第 8 章 製造現場における数学活用．工業調査会，2007
3) Beck, J. V.: Nonlinear Estimation Applied to the Nonlinear Inverse Heat Conduction Problem. Int. J. Heat Mass Transfer. 13, 703-716 (1970)
4) Wang, Y., Cheng, J., Yamamoto, M., Nakagawa, J.: A Numerical Method for Solving the Inverse Heat Conduction Problem without Initial Value. Appear in Inverse Problems in Science and Engineering. 2010
5) Nakagawa, J., Yamamoto, M.: Cultivating an Interface Through Collaborative Research Between Engineers in Nippon Steel & Sumitomo Metal and Mathematicians in University, Educational Interfaces between Mathematics and Industry. Educational Interfaces between Mathematics and Industry. Springer International Publishing Switzerland. 2013, p.427-434
6) 独立行政法人 新エネルギー・産業技術総合開発機構 エネルギー使用合理化技術戦略的開発 エネルギー有効利用基盤技術先導研究開発：固定エネルギー削減のための非定常伝熱逆問題センシング技術の研究開発．平成 18 年度 報告書
7) Cheng, J., Nakagawa, J., Yamamoto, M., Yamazaki, T.: Uniqueness in an Inverse Problem for One-dimensional Fractional Diffusion Equation. 25, 115002 (16pp), 2009
8) Nakagawa, J., Sakamoto, K., Yamamoto, M.: Overview to Mathematical Analysis for Fractional Diffusion Equations—New Mathematical Aspects Motivated by Industrial Collaboration. Journal for Math-for-industry. Vol.1 (2009B-9), 00.157-163
9) 中川淳一：Multi-Scale Modeling for Anomalous Diffusion in Inhomogeneous Media．数理解析研究所講究録．1854，異常拡散の数理．2013．p.78-91
10) 九州大学，東京大学，新日本製鐵，日本数学会，文部科学省委託事業 “ 数学・数理科学と他分野の連携・協力の推進に関する調査･検討～第 4 期科学技術基本計画の検討に向けて～ ” 報告書．2010
11) 中川淳一，竹内知哉，伊東一文，合原一幸：複合ネットワークモデル予測を用いた交通流制御システムの数理的基盤技術．計測自動制御学会制御部門大会(CD-ROM)，巻:13th，ページ：ROMBUNNO.8F3-3．2013
12) Aihara, K., Ito, K., Nakagawa, J., Takeuchi, T.: Optimal Control Laws for Traffic Flow. Applied Mathematics Letters. 26, 617-623 (2013)



中川淳一　Junichi NAKAGAWA
先端技術研究所　数理科学研究部
上席主幹研究員　博士(数理科学)
千葉県富津市新富20-1　〒293-8511