

# 変態塑性および移動硬化則を含む焼入れ残留応力解析における陰的積分の効果

## Effect of Implicit Integration Scheme in Residual Stress Analysis of Quenching Considering Transformation Plasticity and Kinematic Hardening

河原木 雄 介\*  
Yusuke KAWARAGI

岡 村 一 男  
Kazuo OKAMURA

福 本 学  
Manabu FUKUMOTO

### 抄 録

熱処理に伴う残留応力や変形の予測を目的として変態塑性を含む熱弾塑性解析は広く用いられている。熱処理シミュレーションでは、現時刻の応力場に関連している変態塑性を陰的に計算する必要がある。加えて、温度変化や相変態に伴い応力が複雑に変化するため、移動硬化則が必要となることがある。しかしながら、変態塑性を含む熱弾塑性解析では完全陰解法および移動硬化則はほとんど考慮されてこなかった。そこで、変態塑性および移動硬化則を含むリターンマッピングによる熱弾塑性構成則を定式化し、鋼円柱の焼入れ解析を行った。解析結果は X 線回折による実測値と良い一致を示し、完全陰解法による応力積分と移動硬化則の機能を実証した。

### Abstract

The thermo-elastoplastic analysis considering the phase transformation has been widely used to predict the residual stress and distortion going with the heat treatment. In the heat treatment simulation, transformation plasticity should be treated implicitly, because which is considered to have relevance to current stress field. Furthermore, complex mechanical response caused by temperature change and phase transformation often leads to stress reversals, which possibly requires kinematic hardening models in the heat treatment simulation. However, few previous studies consider both fully-implicit formulation and kinematic hardening model in the thermo-elastoplastic analysis including transformation plasticity. In this paper, therefore, thermo-elastoplastic constitutive relations considering the transformation plasticity and kinematic hardening are formulated with the return mapping algorithm, and heat treatment simulations of the steel cylinder are performed based on the proposed formulation. The calculated residual stresses show good agreement with the XRD measurements, and the capability of the fully implicit stress integration with the kinematic hardening model is demonstrated.

## 1. 緒 言

焼入れは、部材をオーステナイト変態温度以上まで加熱後急冷することでマルテンサイト組織を生成させ、部材を硬化させる処理であり、強度が必要とされる様々な機械部品に用いられている。鉄鋼部材に対し焼入れを施すと、冷却工程における部材の表面部と内部の冷却速度差や相変態に伴う体積変化等により、部材にひずみや残留応力が生じる。これらはそれぞれ製品の寸法不良や疲労強度低下の原因となり得ることから、最近ではシミュレーションを用い

ることによってひずみ・残留応力発生メカニズムの検討や、プロセスの最適化が試みられている。現在までに相変態を考慮した有限要素法に関する多くの研究<sup>1)3)</sup>が報告され、熱処理シミュレーション用の汎用ソフトウェア<sup>4)6)</sup>が開発されている。著者らは、汎用有限要素解析ソフトウェア Abaqus に相変態の計算機能を追加することで、独自に熱処理シミュレーションプログラム<sup>7)</sup>を構築し、これまでに多数の鉄鋼製品の熱処理に関する諸問題に適用してきた。

弾塑性解析では、荷重-変位関係が非線形であるため、解析ステップを小さな増分(インクリメント)に分割し、イ

\* 鉄鋼研究所 材料信頼性研究部 研究員 兵庫県尼崎市扶桑町 1-8 〒660-0891

ンクリメントごとに繰り返し計算（イタレーション）により内力と外力の釣り合い解を求める。イタレーション中に各積分点においてひずみ増分に対する応力増分を計算する場合、静的解析ではリターンマッピング<sup>14)</sup>が主流である。リターンマッピングとは、試行的に弾性ひずみ増分を生じさせ、その変形状態を維持しながら塑性ひずみ増分が生じるとして応力を緩和させることで、応力を降伏曲面上に帰着させる手法である。

熱処理等によって相変態が進行中に、その材料の降伏応力以下の応力が負荷された場合でも大きな塑性ひずみが生じる現象を変態塑性という。この変態塑性ひずみは、熱ひずみや塑性ひずみと同等以上の大きさになることがあるため、熱処理による残留応力の予測に大きく影響する。変態塑性ひずみは負荷応力に比例し、その比例係数を変態塑性係数と呼ぶ。実験的に測定された変態塑性係数を用いて変態塑性ひずみを計算し、通常の熱弾塑性解析に用いられている弾性ひずみや塑性ひずみに追加することで様々な解析が行われている<sup>2-13)</sup>。リターンマッピングに変態塑性ひずみを含めない場合、変態塑性の計算に現時刻の応力の値が反映されないため、現時刻の応力の釣り合いが保障されず解析精度を低下させる原因となるが、上記の変態塑性係数を用いて計算される変態塑性ひずみを含めたリターンマッピングの定式化についての詳細な報告は未だ少ない。

また、被熱処理部材内部では、部位によって冷却速度が異なり、相変態やひずみの発生は不均一となる。そのため、部材の応力は複雑に変化し、引張りと圧縮の応力の反転が起こり、これが複数回に及ぶ場合がある<sup>15)</sup>。したがって、熱処理シミュレーションに移動硬化則を用いることで残留応力の予測精度向上が期待でき、過去のいくつかの研究では溶接や焼入れの解析に移動硬化則が用いられている<sup>1-13)</sup>。

上述のように熱処理シミュレーションでは、変態塑性を含んだ陰的な解法<sup>10, 11)</sup>、あるいは移動硬化則の影響をそれぞれ検証した研究はあるが、これらを同時に取り扱い、かつ解析精度への影響について詳細に検討した報告は見られない。

そこで本研究では、変態塑性および移動硬化則を含めた弾塑性構成則のリターンマッピングの定式化を示し、鋼円柱の焼入れ試験を模擬した解析を行うことで残留応力の予測精度を検証する。応力積分において変態塑性を陰的または陽的に計算した解析結果を比較することで解析精度への影響を検証し、等方硬化則または移動硬化則を用いた焼入れ解析の残留応力を X 線による測定結果と比較することで硬化則の検証を行う。

## 2. 解析プログラム

### 2.1 変態塑性の計算

熱処理シミュレーションでは、弾塑性解析における弾性ひずみ、塑性ひずみおよび熱ひずみの他に、相変態に起因

するひずみを考慮する必要がある。微小変形における相変態を考慮した場合の微小時間  $\Delta t$  内の全ひずみ増分  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$  は以下の式で表される。

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_v + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{TP} \quad (1)$$

ここで、 $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_e$  は弾性ひずみ増分、 $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p$  は塑性ひずみ増分、 $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_v$  は熱および変態によるひずみ増分、 $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{TP}$  は変態塑性ひずみ増分である。 $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_v$  は温度および金属組織の変化による等方的な体積変化に起因するひずみであるから、 $\Delta t$  前後における温度  $T$  および組織  $I$  の組織分率  $\xi_I$  から以下のように計算することができる<sup>8)</sup>。

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_v = \frac{1}{3} \left( \frac{\sum_I \xi_I \rho_I(nT)}{\sum_I \xi_I \rho_I(n+1T)} - 1 \right) \quad (2)$$

ここで、添え字の  $n$  と  $n+1$  はそれぞれ時刻  $t$ 、時刻  $t+\Delta t$  における値を意味する。 $\rho_I(T)$  は組織  $I$  の温度  $T$  における密度であり、Mittinen<sup>16)</sup> が提案した化学成分からの予測式を用いて計算している。

変態塑性ひずみについて、Denis<sup>17)</sup> は変態塑性ひずみ  $\boldsymbol{\varepsilon}_{TP}$  は生成相の組織分率  $\xi$  に依存し応力に比例するとして以下の式を提案した。

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_{TP} = 3K(1-\xi) d\xi \mathbf{S} \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{S}$  は偏差応力、 $K$  は変態塑性係数である。本研究では、式 (3) を複数の相変態がある場合に拡張した以下の式を用いた。

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{TP} = \sum_I 3K_I(1-\xi_I) \Delta \xi_I \mathbf{S} \quad (4)$$

ここで、 $K_I$  は組織  $I$  の変態塑性係数である。変態塑性ひずみ増分は偏差応力の値に比例するため、変態塑性ひずみ増分の計算には現時刻における応力の値が必要である。

変態塑性ひずみ増分を陽的に計算した場合、変態ひずみ増分および変態塑性ひずみ増分が熱ひずみ増分と同様に外力項として全ひずみ増分から引かれた後に、相変態を考慮していない弾塑性構成則によるリターンマッピングにより、応力増分および塑性ひずみ増分を陰的に計算する。つまり、変態塑性ひずみ増分は現時刻  $t+\Delta t$  の応力  $\boldsymbol{\sigma}$  ではなく一つ前の時刻  $t$  における応力  $\boldsymbol{\sigma}$  を用いて計算される。したがって、現時刻  $t+\Delta t$  における応力の釣り合いが保障されず、正しい解との誤差が発生する。この誤差の発生による精度の低下は避けられないが、図 1 に示すように、時間増分  $\Delta t$  を小さくすることで時刻  $t+\Delta t$  における  $\boldsymbol{\sigma}$  の誤差を低減することができる。しかしながら、時間増分  $\Delta t$  を小さくした場合、インクリメントの数、すなわち計算回数が増えて解析時間が増加する。

そこで、変態塑性を考慮したリターンマッピングを行うことで、変態塑性ひずみ増分を陽的に計算するのではなく、応力増分および塑性ひずみ増分とともに陰的に計算し、解析精度の向上を図った。この解析を行うためには変態塑性を考慮した弾塑性構成則を用いたリターンマッピングを定式化する必要がある。

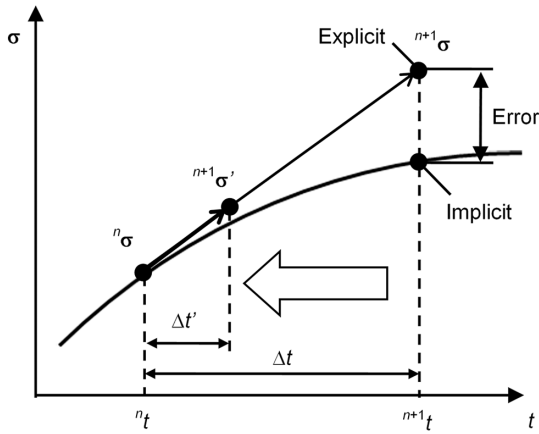


図1 解析誤差の模式図  
Schematic diagram of analysis error

### 2.2 相変態の計算

熱処理シミュレーションの場合、相変態による組織分率の変化を計算する必要がある。対象とする鋼種のTTT線図を用いることで任意の温度、時刻における相変態の予測が可能になるが、あらゆる鋼種のTTTを用意することは困難である。Kirkaldyら<sup>17)</sup>は任意の化学成分を持つ鋼の相変態の予測式を提案した。本研究では、Kirkaldyらの式を修正したLiら<sup>18)</sup>の提案式を使用し、等温変態速度の形では以下のように表される。

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{2k_i G_i (T_i - T)^m \exp(-Q/RT)}{F_i(C, Mn, Si, Ni, Cr, Mo)} \xi_i^{0.4(1-\xi_i)} (1-\xi_i)^{0.4\xi_i} \quad (5)$$

ここで、 $F_i$ は各合金元素C, Si, Mn, Cr, Ni, Moの重量%濃度の関数、 $k_i$ は定数であり、多数の公開されたTTTデータにフィッティングさせることで決定されている。 $Q$ は拡散変態の活性化エネルギー、 $G_i$ はオーステナイト結晶粒度、 $R$ は気体定数、 $m$ は定数である。 $T_i$ は変態上限温度であり、フェライト、パーライト、ベイナイトの場合、それぞれAe3点、Ae1点、Bs点である。各変態上限温度は化学成分からの予測式<sup>18, 19)</sup>が提案されている。微小時間内に温度が一定であると仮定し、式(5)を積分することで連続冷却時の組織分率を計算できる。無拡散変態であるマルテンサイト変態の場合、時間には関係なく温度に依存して進行する。Koistinenら<sup>20)</sup>はマルテンサイトの組織分率の推定式として実験データから以下の回帰式を提案し、本研究ではその式を用いた。

$$\xi_M = 1 - \exp\{-0.011(Ms - T)\} \quad (6)$$

ここで、 $Ms$ はマルテンサイト変態開始温度であり、化学成分からの予測式<sup>19)</sup>を用いている。

### 2.3 硬化則

焼入れによる冷却過程では、被熱処理部材内部において部位によって冷却速度が異なり、相変態やひずみの発生は不均一となる。そのため、部材の応力は複雑に変化し、引張りと圧縮の応力の反転が起こり、これが複数回に及ぶ場

合がある。繰り返し荷重を受ける金属材料において、等方硬化則では表現できないBauschinger効果等の弾塑性挙動を表現するための硬化則として、移動硬化則がある。そこで、熱処理シミュレーションに移動硬化則を導入することによって、焼入れによる残留応力の予測精度を改善できると期待される。したがって本研究では、リターンマッピングの定式化に移動硬化則を含む弾塑性構成式を用いることで、移動硬化則の使用を可能にした。

降伏条件には金属材料で一般的なMisesの降伏関数を用い、硬化則には等方硬化則と移動硬化則の混合硬化則を用いた。移動硬化則を考慮する場合、Misesの降伏関数は以下の式で表される。

$$f = \bar{\sigma} - Y = \sqrt{\frac{3}{2}(\mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}') : (\mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}')} - Y = 0 \quad (7)$$

ここで、 $\bar{\sigma}$ は相当応力、 $Y$ は降伏応力、 $\boldsymbol{\alpha}'$ は背応力の偏差成分である。背応力は応力空間内における降伏曲面の移動を表す変数である。背応力の発展則にはArmstrong-Frederick則<sup>21)</sup>を用い、純粋な線形移動硬化項と非線形性を導入する緩和項との和として定義する。非線形項を追加することで、二直線近似では精度良くフィッティングできない形状の応力-ひずみ線図も表現できる。背応力 $\boldsymbol{\alpha}'$ は背応力の成分 $\alpha'_i$ の重ね合わせで表され、それぞれ以下の式で定義される。

$$\boldsymbol{\alpha}' = \sum_i \boldsymbol{\alpha}'_i \quad (8)$$

$${}^{n+1}\boldsymbol{\alpha}'_i = {}^n\boldsymbol{\alpha}'_i + c_i \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p - b_i \Delta p {}^{n+1}\boldsymbol{\alpha}'_i \quad (9)$$

ここで、 $c_i$ 、 $b_i$ は材料定数である。 $\Delta p$ は相当塑性ひずみ増分であり、

$$\Delta p = \sqrt{\frac{2}{3} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p} \quad (10)$$

と定義される。

### 2.4 リターンマッピング定式化

以下に変態塑性および移動硬化則を含む弾塑性構成則の定式化を示す。時刻 $t$ における応力 ${}^n\boldsymbol{\sigma}$ が既知であるとする。時刻 $t'$ における応力 ${}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}$ は以下の式により表される。

$$\begin{aligned} {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma} &= {}^{n+1}\mathbf{C} : {}^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_e \\ &= ({}^n\mathbf{C} + \Delta\mathbf{C}) : ({}^n\boldsymbol{\varepsilon}_e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_e) \\ &= {}^n\mathbf{C} : {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_e + \Delta\mathbf{C} : {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_e + ({}^n\mathbf{C} + \Delta\mathbf{C}) : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_e \\ &= {}^n\boldsymbol{\sigma} + \Delta\mathbf{C} : {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_e + {}^{n+1}\mathbf{C} : (\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_e - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_v - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{pp}) \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、 $\mathbf{C}$ は弾性係数テンソル、 $\Delta\mathbf{C}$ は温度変化による $\mathbf{C}$ の増分である。式(5)、(6)のように変態の応力依存性がない場合、熱および変態によるひずみ増分は応力に依存せずリターンマッピングには影響しないため、全ひずみ増分から除いたひずみ増分を用いる。これを

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_M = \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_v \quad (12)$$

とおく。ひずみ増分がすべて弾性ひずみであると仮定した場合の応力を弾性予測子といい、次式で表される。

$$\boldsymbol{\sigma}^{(T)} = {}^n\boldsymbol{\sigma} + \Delta\mathbf{C} : {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_e + {}^{n+1}\mathbf{C} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_M \quad (13)$$

式 (11) は弾性予測子を用いて次のように表される。

$${}^{n+1}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(n)} - {}^{n+1}\mathbf{C} : (\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{TP}) \quad (14)$$

流れ則から、塑性ひずみ増分  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p$  は、

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p = \Delta p \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3\Delta p}{2^{n+1}\bar{\sigma}} ({}^{n+1}\mathbf{S} - {}^{n+1}\boldsymbol{\alpha}') \quad (15)$$

と表される。式 (4) 中の応力に依存しない部分はリターンマッピング中には変化せず、これを  $\Delta h$  とおく。

$$\Delta h = \sum_i 3K_i (1 - \sum_j \xi_j) \Delta \xi_i \quad (16)$$

式 (4) は  $\Delta h$  を用いて以下のように表される。

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{TP} = \Delta h {}^{n+1}\mathbf{S} \quad (17)$$

式 (17), (15) を式 (14) に代入し、両辺の偏差成分を取り、式 (7) の条件を用いると

$$\Delta p \left( \frac{3^{n+1}G}{1+2^{n+1}G\Delta h} + \frac{3}{2} \sum_i \frac{c_i}{1+b_i\Delta p} \right) = \frac{\bar{\theta}}{1+2^{n+1}G\Delta h} - {}^{n+1}Y \quad (18)$$

となる。ここで、

$$\bar{\theta} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\theta} : \boldsymbol{\theta}} \quad (19)$$

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{S}^{(n)} - (1+2^{n+1}G\Delta h) \sum_i \frac{{}^n\boldsymbol{\alpha}'_i}{1+b_i\Delta p} \quad (20)$$

とされている。 $\mathbf{S}^{(n)}$  は弾性予測子  $\boldsymbol{\sigma}^{(n)}$  の偏差成分、 $G$  はせん断剛性率である。式 (18) を解くことで  $\Delta p$  を求めることができる。式 (18) は  $\Delta p$  に関する非線形方程式であるから、Newton-Raphson 法により数値的に解を計算する。

相当塑性ひずみ増分が決定されたことで、時刻  ${}^{n+1}t$  における応力ならびに各ひずみは以下のように更新される。

$${}^{n+1}\boldsymbol{\sigma} = {}^{n+1}\mathbf{S} + \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^{(n)}) \mathbf{I} = \boldsymbol{\theta} \frac{{}^{n+1}Y}{\bar{\theta}} + {}^{n+1}\boldsymbol{\alpha}' + \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^{(n)}) \mathbf{I} \quad (21)$$

$${}^{n+1}\boldsymbol{\alpha}' = \sum_i \frac{{}^n\boldsymbol{\alpha}'_i}{1+b_i\Delta p} + \frac{3}{2} \sum_i \frac{c_i}{1+b_i\Delta p} \Delta p \frac{\boldsymbol{\theta}}{\bar{\theta}} \quad (22)$$

$${}^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_p = {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_p + \frac{3}{2} \Delta p \frac{\boldsymbol{\theta}}{\bar{\theta}} \quad (23)$$

$${}^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{TP} = {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_{TP} + \Delta h {}^{n+1}\mathbf{S} \quad (24)$$

$${}^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_e = {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_M - \frac{3}{2} \Delta p \frac{\boldsymbol{\theta}}{\bar{\theta}} - \Delta h {}^{n+1}\mathbf{S} \quad (25)$$

ここで、 $\mathbf{I}$  は 2 階の恒等テンソルである。塑性ひずみが発生せず変態塑性ひずみのみ発生する場合は、リターンマッピングを行わずに式 (21)～式 (25) において  $\Delta p=0$  として各応力、ひずみを更新する。

弾塑性解析ではイタレーションによって全体の釣り合い解を求める際に、応力増分とひずみ増分の関係を表すコンシステント接線剛性を計算する必要がある。変態塑性を含むコンシステント接線剛性  $\mathbf{C}^{\text{ep}}$  は以下の式により表される。式の導出過程は割愛する。

$$\mathbf{C}^{\text{ep}} = \mathbf{C}' - \frac{3G'}{\left[ \frac{3^{n+1}G}{1+2^{n+1}G\Delta h} \left\{ {}^{n+1}H' + \frac{3}{2} \sum_i \frac{c_i}{1+b_i\Delta p} \right\} - 3G' \left\{ \frac{3}{2} \sum_i \frac{b_i {}^n\boldsymbol{\alpha}'_i}{1+b_i\Delta p} \right\} : \frac{\boldsymbol{\theta}}{\bar{\theta}} \right]} \left[ \frac{3^{n+1}G}{1+2^{n+1}G\Delta h} + \frac{3}{2} \sum_i \frac{c_i}{1+b_i\Delta p} + {}^{n+1}H' - \left\{ \frac{3}{2} \sum_i \frac{b_i {}^n\boldsymbol{\alpha}'_i}{1+b_i\Delta p} \right\} : \frac{\boldsymbol{\theta}}{\bar{\theta}} \right]} \frac{\boldsymbol{\theta}}{\bar{\theta}} \otimes \frac{\boldsymbol{\theta}}{\bar{\theta}}$$

$$\frac{3^{n+1}G}{1+2^{n+1}G\Delta h} - 3G' \left\{ \sum_i \frac{b_i {}^n\boldsymbol{\alpha}'_i}{1+b_i\Delta p} \right\} : \frac{\boldsymbol{\theta}}{\bar{\theta}} \left[ \frac{3^{n+1}G}{1+2^{n+1}G\Delta h} + \frac{3}{2} \sum_i \frac{c_i}{1+b_i\Delta p} + {}^{n+1}H' - \left\{ \frac{3}{2} \sum_i \frac{b_i {}^n\boldsymbol{\alpha}'_i}{1+b_i\Delta p} \right\} : \frac{\boldsymbol{\theta}}{\bar{\theta}} \right] \right] \quad (26)$$

式 (26) における  $\mathbf{C}'$  および  $G'$  は以下ようになる。

$$\mathbf{C}' = 2G' \mathbf{I} + \left( K - \frac{2}{3} G' \right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (27)$$

$$G' = {}^{n+1}G \left( {}^{n+1}Y + \frac{3}{2} \Delta p \sum_i \frac{c_i}{1+b_i\Delta p} \right) \frac{1}{\bar{\theta}} \quad (28)$$

ここで、 $K$  は体積弾性率、 $\mathbf{I}$  は 4 階の恒等テンソル、 $H'$  は加工硬化係数であり、 $H' = \partial Y / \partial \Delta p$  である。

### 3. 解析精度の検証

#### 3.1 応力積分の影響の検証

Abaqus のユーザサブルーチンに上述の相変態およびリターンマッピングの計算機能を追加し焼入れの解析を行った。変態塑性を陽的または陰的に計算した場合の解析結果を比較することで解析精度を検証した。解析精度の比較のために、インクリメント当たりの最大温度変化許容量  $\Delta T_{\text{max}}$  を変化させた。設定した  $\Delta T_{\text{max}}$  の値を超えないように時間増分の値が決定されるため、インクリメント当たりの最大温度変化許容量  $\Delta T_{\text{max}}$  を大きく設定すると、時間増分の値が大きくなり解析結果の誤差が大きくなる。

図 2 には、軸方向長さ無限大、直径 18mm の丸棒を模擬した 2 次元軸対称モデルを示す。要素には軸対称四辺形一次要素を使用し、節点数は 74、要素数は 36 である。要素は全て  $0.25 \times 0.25 \text{ mm}$  の正方形であり、節点間隔は均等である。境界条件として、中心軸上の節点の  $r$  方向変位とモデルの下端の節点の  $z$  方向変位を固定し、モデル上端の各節点の  $z$  方向変位がすべて等しくなる拘束を与えた（一般化平面ひずみ条件に相当）。初期温度  $20^\circ\text{C}$  から  $1^\circ\text{C/s}$  で  $930^\circ\text{C}$  まで一様に加熱後、雰囲気温度  $20^\circ\text{C}$ 、熱伝達係数  $4000^\circ\text{C/W/m}^2\text{K}$  で表面を冷却した。材料データには SCr420 のものを用いた。ヤング率、応力-ひずみ線図等の機械的特性は実測値を使用し、熱伝導率や比熱等の熱的特性は Miettinen の式<sup>16)</sup>を用いて SCr420 の化学成分から予測した

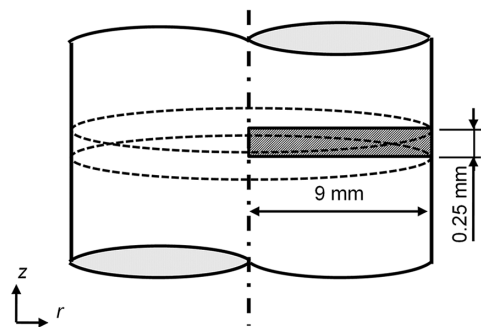


図 2 鋼円柱の単純解析モデル  
Simplified analysis model of steel cylinder

値を使用している。

図3には、変態塑性を陽的または陰的に計算した場合における、熱処理シミュレーションの焼入れ完了後の周方向残留応力の半径方向分布を示す。インクリメント当たりの最大温度変化許容量  $\Delta T_{\max}$  は1としている。この結果より、時間増分が十分に小さい場合には実用上両者で同等の解析結果が得られるといえる。

図4には、変態塑性を(a)陽的、または(b)陰的に計算

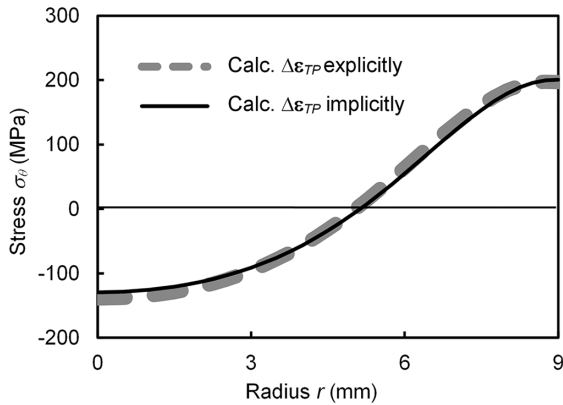
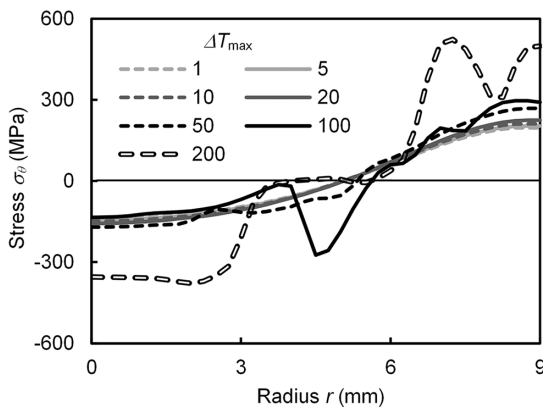
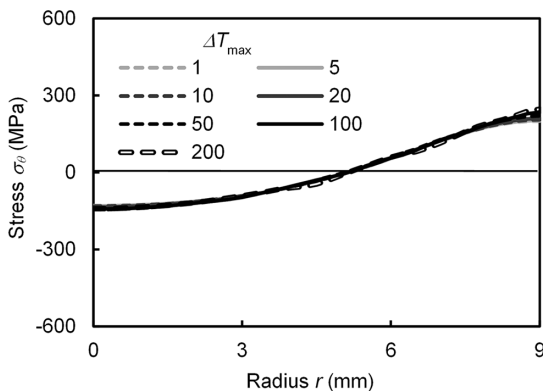


図3 焼入れ完了後の周方向残留応力の分布  
Distribution of circumferential residual stress after quenching



(a) Explicit calculation of transformation plasticity



(b) Implicit calculation of transformation plasticity

図4  $\Delta T_{\max}$  を変化させた場合の周方向残留応力分布  
Distribution of circumferential residual stress varying  $\Delta T_{\max}$

して得られた熱処理シミュレーション解析完了時の周方向残留応力の半径方向分布を示し、それぞれインクリメント当たりの最大温度変化許容量  $\Delta T_{\max}$  を変化させた場合の解析結果への影響を調べた。変態塑性を陽的に計算した場合、時間増分が大きくなるほど誤差が大きくなることが確認でき、 $\Delta T_{\max}$  が  $100^{\circ}\text{C}$  を超えると正確な解析がほぼ不可能になっていることがわかる。一方、変態塑性を陰的に計算した場合、時間増分が大きくなることによる誤差が陽的な場合と比較して小さく、精度良く解析ができることがわかった。時間増分を大きくしても解析精度が十分に保たれていることから、時間増分を大きくすることで解析速度を向上できる。

### 3.2 収束速度の検証

イタレーションにおける収束速度を検証することで、式(26)のコンシステント接線剛性の妥当性を検証した。弾塑性解析ではNewton-Raphson法によって変位増分の修正量を計算する際にコンシステント接線剛性を用いる。このとき、コンシステント接線剛性が正確であれば2次の収束速度が保障されている。解析モデルは3.1節と同様である。式(26)を正確に検証するため、硬化則には移動硬化則を用い、塑性ひずみ増分および変態塑性ひずみ増分が同時に発生しているインクリメントにおける収束性を評価した。移動硬化則のパラメータは、 $20^{\circ}\text{C}$  から  $900^{\circ}\text{C}$  の範囲における各組織の単軸引張試験の応力-ひずみ線図に対してフィッティングさせることで代用した。また、式(26)は非対称であるため対称マトリクスを前提としたソルバーを使用できず、計算コストが増大する。

図5には、全体の釣り合いの収束計算におけるイタレーションと節点の残差力の最大値の関係を示す。図5より、本研究によるコンシステント接線剛性を用いることで残差が2次のオーダーで収束していることが確認でき、コンシステント接線剛性の導出が妥当であることが確認できた。

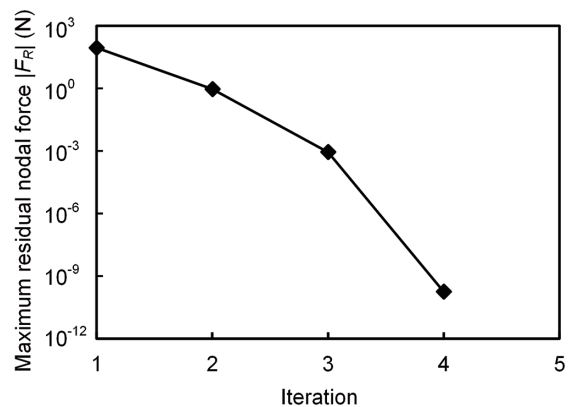


図5 イタレーションと節点の残差力の最大値の関係  
Relationship between iteration and maximum residual nodal force

## 4. 焼入れ解析への適用

### 4.1 解析方法

熱処理シミュレーションにおける硬化則の影響を検証するために、硬化則に等方硬化則のみあるいは移動硬化則のみを用いて焼入れ解析を行い、日本熱処理技術協会焼入れ残留応力の数値シミュレーション研究部会(2009年5月～2012年3月)において行われた焼入れ試験のX線回折による残留応力測定結果<sup>22)</sup>と比較した。図6には、直径18mm、長さ100mmの丸棒を模擬した2次元軸対称モデルを示す。節点数は3096、要素数は2944、最小要素寸法は0.2mmである。境界条件として、中心軸上の節点の $r$ 方向変位とモデル中央の節点の $z$ 方向変位を固定した。初期温度20℃から1℃/sで850℃まで一様に加熱後、水焼入れの条件で表面を冷却した。熱伝達係数は、実際の焼入れ試験の測温結果から逆解析によって同定された値<sup>22)</sup>を用いた。材料データにはSCr430のものを用いた。

### 4.2 解析結果および考察

図7には、丸棒の軸方向中央部の最表面における周方向の応力ならびに塑性ひずみの時間履歴を示す。図7より、等方硬化則、移動硬化則ともに、冷却開始直後に引張方向に応力が発生し、引張りの塑性ひずみが発生していることが確認できる。その後、応力が圧縮方向に反転した際に移動硬化則と等方硬化則の弾塑性挙動に差異が見られる。移動硬化則では塑性ひずみが圧縮方向に増加しているのに対し、

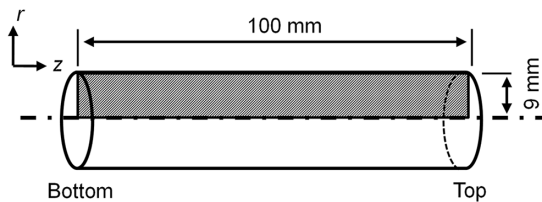


図6 丸棒の解析モデル  
Analysis model of steel cylinder

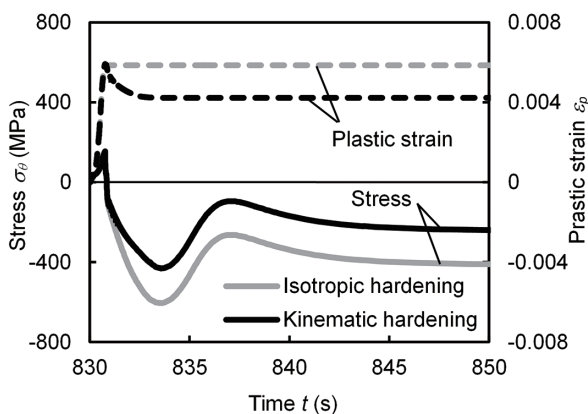


図7 焼入れ中の周方向応力と塑性ひずみの履歴  
History of circumferential stress and plastic strain during quenching

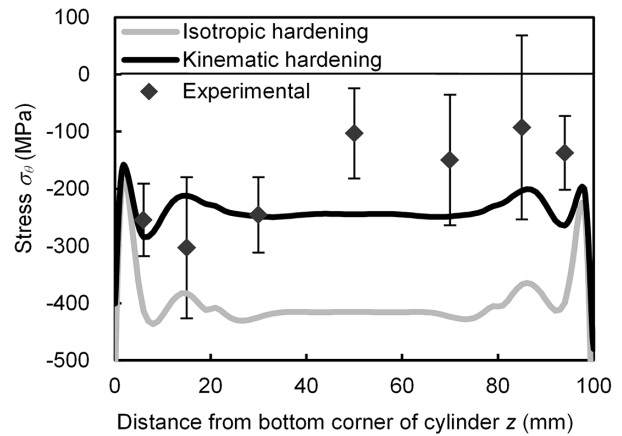


図8 焼入れ完了後における丸棒表面の残留応力分布  
Distribution of residual stress at surface after quenching

し、等方硬化則ではほとんど塑性ひずみが増加しておらず、このため応力に差異が現れたと考えられる。応力反転後に塑性ひずみが大きく変化したことから、移動硬化則を適用することによって降伏曲面が移動し降伏応力が減少したことが確認できた。

図8には、等方硬化則と移動硬化則を用いた場合の丸棒の焼入れによる最表面の周方向残留応力の軸方向分布を示す。移動硬化則を用いた場合の引張残留応力は、等方硬化則を用いた場合の引張残留応力よりも小さく、X線回折による測定結果に近い値が得られた。よって、熱処理シミュレーションに移動硬化則を適用することで、熱処理残留応力の予測精度を向上できることを示した。

## 5. 結 言

本研究では、変態塑性および移動硬化則を含む弾塑性構成式のリターンマッピングの定式化を示し、鋼円柱の焼入れ試験を模擬した解析を行うことで、変態塑性を陰的に計算することによる解析精度への影響を検証し、焼入れ解析の残留応力をX線による測定結果と比較することで硬化則の検証を行った。

その結果、変態塑性を陰的に計算することで陽的に計算した場合よりも解析精度を大幅に向上できることが確認できた。また、引張りと圧縮の応力の反転が観察される焼入れでは、熱処理シミュレーションに移動硬化則を導入することで、より実験結果に近い残留応力が得られた。

本研究で構築した熱処理シミュレーションプログラムは、実製品の熱処理における問題解決に適用されている。自動車用のギアやシャフトといった焼入れ時のひずみが問題になっている製品に対し、熱処理ひずみの発生機構を明確化し、ひずみを低減できる焼入れ手法の提案などで実績を上げている。

本論文は材料学会誌“材料”に掲載された論文<sup>23)</sup>であり、著作権は日本材料学会に帰属する。

参考文献

- 1) Inoue, T. et al.: Ingenieur-Archiv. 50, 315 (1981)
- 2) Denis, S. et al.: Mech. Phys. Solids. 1 (10), 805 (1985)
- 3) Okamura, K. et al.: 32nd Japan Congress on Materials Research. 1989, p.323
- 4) Inoue, T. et al.: Proceedings of the first International Conference on Quenching and Control of Distortion. 1992, p.205
- 5) Nagasaka, Y.: Metal. Trans. 24A, 795 (1993)
- 6) Arimoto, K. et al.: Proceedings 18th Heat Treating Conference. ASM International, 1998, p.639
- 7) Fukumoto, M. et al.: J. Soc. Mater. Sci. 50 (6), 598 (2001)
- 8) Okamura, K.: J. Soc. Mater. Sci. 55 (5), 529 (2006)
- 9) Simsir, C. et al.: J. Mater. Process. Tech. 207, 211 (2008)
- 10) Mahnken, R. et al.: Int. J. Plast. 25, 183 (2009)
- 11) Lee, M.G. et al.: Int. J. Plast. 25, 1726 (2009)
- 12) Deng, D. et al.: Comp. Mater. Sci. 78, 55 (2013)
- 13) Hamelin, C.J. et al.: Acta Mater. 75, 1 (2014)
- 14) Ortiz, M. et al.: Int. J. Numer. Meth. Eng. 21, 1561 (1985)
- 15) Sinha, A.K. et al.: ASM Handbook. 4, 1991, p.601
- 16) Miettinen, J.: Metall. Mater. Trans. 28B, 281 (1997)
- 17) Kirkaldy, J.S. et al.: AIME. 125 (1983)
- 18) Li, M.V. et al.: Metall. Mater. Trans. 29B, 661 (1998)
- 19) Kunitake, T.: J. Jpn. Soc. Heat Treat. 41, 164 (2000)
- 20) Koistinen, D.P. et al.: Acta Metall. 7, 59 (1959)
- 21) Armstrong, P.J. et al.: Metall. Mater. Trans. Central Electricity Board Report RD/B/N, 731, (1966)
- 22) Activity Report of Quenching and Its Simulation Study Group: JSHT, 2012
- 23) Kawaragi, Y. et al.: J. Soc. Mater. Sci. Jpn. 64, 258 (2015)



河原木雄介 Yusuke KAWARAGI  
鉄鋼研究所 材料信頼性研究部  
研究員  
兵庫県尼崎市扶桑町1-8 〒660-0891



福本 学 Manabu FUKUMOTO  
技術開発企画部 研究推進室  
主幹研究員



岡村一男 Kazuo OKAMURA  
技術開発本部 フェロー  
博士(エネルギー科学)